4 COMBINACIONES

Vamos a recuperar algunos problemas resueltos en el apartado anterior que nos sirvan de modelo para el tratamiento teórico de un nuevo tipo de agrupamiento.

- *¿Cuántos partidos han de jugar 4 amigos si deciden enfrentarse cada uno contra todos los demás?*

  Disponemos de 4 elementos, A, B, C, D. Queremos agruparlos de dos en dos, sin que importe el orden. El número de posibilidades se obtiene contándolas como si importara el orden ($4 \cdot 3$) y, después, dividiendo por el número de veces que está repetida cada opción.

  Resultado: $\dfrac{4 \cdot 3}{2}$

- *¿Cuántos apretones de mano se darán 10 amigos que se encuentran?*

  Análogamente, contamos los saludos como si importara el orden (A saluda a B o B saluda a A). Serían $V_{10,\,2} = 10 \cdot 9$. Después, dividimos por 2.

  Resultado: $\dfrac{10 \cdot 9}{2}$

- *En un colectivo de 10 personas, ¿de cuántas formas se pueden elegir los 3 representantes que acudirán a una cierta reunión?*

  Aunque no importa el orden en que salgan elegidos, empecemos contándolos como si importara: $V_{10,\,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8$

  Pero como no influye el orden, cada una de las posibles elecciones la hemos contado 6 veces: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. Tantas como formas en que se pueden ordenar estos 3 elementos, es decir:

  $$P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 \text{ (permutaciones de 3 elementos)}$$

  Por tanto, el número de posibles elecciones es: $\dfrac{V_{10,\,3}}{P_3} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1}$

Generalicemos estos resultados:

Disponemos de m elementos. Se llaman **combinaciones** a las distintas agrupaciones que podemos formar tomando n de ellos, sin que importe el orden en que aparezcan y sin que puedan repetirse. Su número se designa por $C_{m,\,n}$ (se lee "combinaciones de m elementos tomados n a n").

$$C_{m,\,n} = \frac{V_{m,\,n}}{P_n}$$

COMBINACIONES

- Hay m elementos de partida.
- Se forman agrupaciones de n de ellos.
- No pueden estar repetidos.
- No importa el orden.

ACTIVIDADES

1 Tenemos 6 puntos en el espacio de tal modo que no hay tres alineados ni cuatro coplanarios. ¿Cuántas rectas podemos trazar uniendo dos de estos puntos? ¿Cuántos planos que se apoyen en tres de ellos? (ALINEADOS: Sobre la misma línea recta; COPLANARIOS: Sobre el mismo plano.)

2 ¿Cuántas posibles mezclas de dos colores, en idénticas cantidades, se pueden hacer con 8 tarros de pintura de distintos colores?

¿Cuántas mezclas de tres colores?

¿Y de cuatro colores?

5 FACTORIALES Y NÚMEROS COMBINATORIOS

MAGNITUD DE LOS FACTORIALES

El valor de $n!$ crece enormemente deprisa al aumentar n. Por ejemplo,

$10! = 3\,628\,000$

$20!$ tiene 18 cifras.

FACTORIALES

El número de permutaciones de n elementos es:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

A este producto de n factores decrecientes a partir de n se le designa por $n!$, que se lee "factorial de n" o "n factorial".

Por ejemplo, $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

La fórmula de las variaciones se puede expresar muy cómodamente con factoriales:

$$V_{m,\,n} = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) =$$

$$= \frac{[m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)] \cdot [(m-n) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1]}{(m-n) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{m!}{(m-n)!}$$

ACLARACIÓN

Hemos multiplicado numerador y denominador por $(m-n)!$ para conseguir en el numerador $m!$.

Por ejemplo: $V_{7,\,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{7!}{4!}$

NÚMEROS COMBINATORIOS

Los números que se obtienen al aplicar la fórmula de las combinaciones, $C_{m,\,n}$, se llaman **números combinatorios** y se suelen designar así: $\binom{m}{n}$

Se lee *m sobre n*.

$$C_{m,\,n} = \binom{m}{n}$$

Por ejemplo: $\binom{7}{3} = C_{7,\,3} = \dfrac{V_{7,\,3}}{P_3} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$

Los números combinatorios pueden expresarse, también, con factoriales:

$$\binom{m}{n} = \frac{V_{m,\,n}}{P_n} = \frac{m!\,/\,(m-n)!}{n!} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

Por ejemplo: $\binom{7}{3} = \dfrac{V_{7,\,3}}{P_3} = \dfrac{7!\,/\,4!}{P_3} = \dfrac{7!}{3! \cdot 4!}$

TEN EN CUENTA

Los factoriales son muy cómodos para manejar expresiones teóricas. Pero para cálculos numéricos son preferibles las fórmulas sin ellos.

CALCULADORA. TECLAS X! nPr nCr

En muchas calculadoras científicas existen las teclas X!, nPr, nCr, cuya utilidad vemos a continuación.

Permutaciones (factoriales): $P_7 = 7!$ → 7 X! 5040

Variaciones: $V_{7,\,3}$ → 7 nPr 3 = 210

Combinaciones o números combinatorios: $\binom{7}{3}$ → 7 nCr 3 = 35

Algunas calculadoras carecen de la tecla X!, pues es muy fácil obtener factoriales con la tecla nPr. Por ejemplo: $7!$ → 7 nPr 7 = 5040

CONOCE TU CALCULDORA

Habitualmente, estos resultados se obtienen como "segunda función" de las correspondientes teclas. Por tanto, deben ir precedidas por SHIFT:

$7!$ → 7 SHIFT X!

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS COMBINATORIOS

Los números combinatorios tienen interesantes propiedades. Vamos a ver algunas:

I. $\binom{m}{0} = 1, \ \binom{m}{m} = 1$

$\binom{m}{0}$ significa el número de combinaciones *con ningún elemento* que se pueden hacer con m elementos. Solo el conjunto vacío tiene "ningún elemento". Es decir, solo hay una.

$\binom{m}{m}$ es el número de combinaciones que se pueden hacer con todos los elementos. Es claro que solo hay una.

II. $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$ Si disponemos de m elementos, cada vez que escogemos n nos quedan $m - n$. Es decir, cada vez que formamos una combinación de n elementos, nos queda otra de $m - n$.

III. $\binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} = \binom{m}{n}$ La justificación de esta propiedad es más complicada. La damos, de forma lúdica, en la página 239 (Juegos para pensar).

EJEMPLOS

I. $\binom{7}{0} = 1, \ \binom{4}{4} = 1$

II. $\binom{7}{3} = \binom{7}{4}, \ \binom{100}{99} = \binom{100}{1}$

III. $\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}$

$\binom{7}{5} + \binom{7}{6} = \binom{8}{6}$

$\binom{11}{7} + \binom{11}{8} = \binom{12}{8}$

TRIÁNGULO DE TARTAGLIA

Tartaglia (se lee *Tartalla*) fue un matemático italiano del siglo XVI. Para resaltar las propiedades de los números combinatorios, se le ocurrió ponerlos del siguiente modo:

$$\begin{array}{c} \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\ \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{3} \\ \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\ \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\ \binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \end{array}$$

Sus correspondientes valores son los siguientes. Puedes comprobarlo:

$$\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \end{array}$$

Esta configuración responde a las propiedades de arriba.

- Todos los elementos de los extremos valen 1 (Propiedad I).
- En cada fila, los elementos simétricos son iguales (Propiedad II).
- Cada elemento, salvo los de los extremos, se obtiene sumando los dos que tiene encima (Propiedad III).

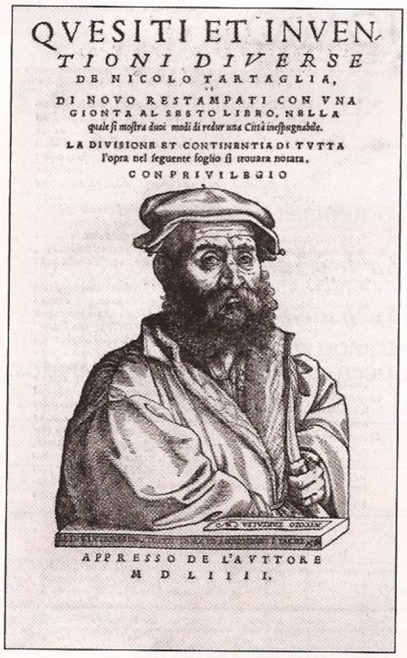
De este modo, cada línea del triángulo de Tartaglia se obtiene de la anterior: se empieza y se termina con 1 y cada uno de los demás términos se halla sumando los dos que tiene encima.

TARTAGLIA

El verdadero nombre de Tartaglia fue Niccolò Fontana. En una guerra recibió un golpe a consecuencia del cual quedó tartamudo.

Su apodo, Tartaglia (tartaja), se hizo tan popular que él mismo firmaba así sus libros.

$$\begin{array}{ll} 5^{a} & 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ 6^{a} & 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\ 7^{a} & 1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \end{array}$$



Tartaglia.

OTRA PROPIEDAD DEL TRIÁNGULO DE TARTAGLIA

La suma de los elementos de la fila n-ésima es 2^n.

$$1 \quad 1 \longrightarrow 2 = 2^1$$

$$1 \quad 2 \quad 1 \longrightarrow 4 = 2^2$$

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \longrightarrow 8 = 2^3$$

$$1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \longrightarrow 16 = 2^4$$

La razón es muy sencilla: cada elemento de una fila se utiliza dos veces como sumando para formar la fila siguiente. Por ejemplo, para obtener la fila 4ª a partir de la 3ª:

1 3 3 1

1 1 3 3 3 3 1 1

1 4 6 4 1

ACTIVIDADES

1 Escribe como cociente de factoriales:

a) $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ b) $19 \cdot 18 \cdot 17$

c) $n(n-1)(n-2)(n-3)$ d) $(n+1)\,n(n-1)$

e) $(n-1)(n-2)\dots(n-9)$

f) $(m+2)(m+1)\dots(n+1)\,n(n-1)$

2 Simplifica los siguientes cocientes entre factoriales:

a) $\dfrac{7!}{5!}$ b) $\dfrac{8!}{9!}$ c) $\dfrac{9!}{5!\,4!}$

d) $\dfrac{m!}{(m-1)!}$ e) $\dfrac{(m+1)!}{m!}$ f) $\dfrac{(m+1)!}{(m-1)!}$

3 Resuelve las ecuaciones:

a) $V_{x,2} = 7x$ b) $VR_{x,2} - V_{x,2} = 8$

c) $V_{x,2} - V_{x-2,2} = 62$ d) $VR_{x,3} - VR_{x,2} = 180$

4 Calcula utilizando factoriales y simplifica:

a) $C_{m+2,n}$ b) $C_{m+1,m-1}$

5 Escribe la fila once del triángulo de Tartaglia.

6 Calcula: $\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \dots + \binom{8}{8}$

7 ¿Cuántas aleaciones distintas se pueden formar con 6 metales diferentes? Cada aleación debe estar formada por dos o más metales.

8 Resuelve las ecuaciones siguientes sin desarrollar los números combinatorios:

a) $\binom{8}{3} + \binom{8}{x} = \binom{9}{4}$

b) $\binom{11}{3} + \binom{11}{x} = \binom{12}{3}$

c) $\binom{17}{x} = \binom{17}{x+1}$

9 Tienes 8 monedas (2 €, 1 €, 50 cent., 20 cent., 10 cent., 5 cent., 2 cent. y 1 cent.). Te piden un donativo y puedes responder de muchas formas distintas: no dar nada, dar una moneda, dos…, todas. ¿Cuántas posibles respuestas hay?

10 Resuelve sin desarrollar:

a) $\binom{39}{5+2x} = \binom{39}{2x-2}$

b) $\binom{33}{x} + \binom{33}{x+y} = \binom{34}{5}$

6 FÓRMULA DEL BINOMIO DE NEWTON

Como sabemos, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Operando se pueden obtener las sucesivas potencias de $a+b$.

$$(a+b)^3 = (a+b)^2 \cdot (a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = (a+b)^3 \cdot (a+b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Para observar las regularidades que se producen, ordenamos los resultados:

ACLARACIÓN

Para que se aprecie mejor el resultado, hemos aislado a la derecha los coeficientes.

$(a+b)^1$	$a+b$	1 1
$(a+b)^2$	$a^2+2ab+b^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$	1 4 6 4 1

Los coeficientes son las sucesivas filas del triángulo de Tartaglia.

Obtengamos razonadamente la siguiente potencia: $(a+b)^5$. Para ello, multiplicamos $(a+b)^4 \cdot (a+b)$. Lo hacemos multiplicando primero por a (flecha azul), después por b (flecha roja) y sumando los resultados.

$$\begin{array}{cccccc}
a^4 & 4a^3b & 6a^2b^2 & 4ab^3 & b^4 & \\
 & a^4b & 4a^3b^2 & 6a^2b^3 & 4ab^4 & b^5 \\
a^5 & 4a^4b & 6a^3b^2 & 4a^2b^3 & ab^4 & \\
\hline
1a^5 & (1+4)\,a^4b & (4+6)\,a^3b^2 & (6+4)\,a^2b^3 & (4+1)\,ab^4 & 1\cdot b^5
\end{array}$$

Observamos que:

- Aparecen todos los posibles términos de 5º grado: a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4 y b^5.
- Sus coeficientes son la suma de coeficientes de los términos que tienen encima, es decir, constituyen la fila 5 del triángulo de Tartaglia (puesto que los que tienen encima son la fila 4).

NO LO OLVIDES

En la fórmula del binomio de Newton, los coeficientes de los sucesivos términos son los números de la fila n-ésima del triángulo de Tartaglia.

En general, se obtiene la llamada **fórmula del binomio de Newton:**

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

ACTIVIDADES

1 Desarrolla: a) $(x+3)^5$ b) $(2x-x^2)^4$ c) $\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{x}\right)^6$

2 Calcula el quinto término de:

a) $\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+1\right)^{10}$ b) $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{3}{x}\right)^6$

3 Calcula el coeficiente de x^5 en el desarrollo del binomio:

$$\left(\frac{x^2}{2}-\frac{3}{x}\right)^8$$

4 ¿Qué signo tendrá el séptimo término del binomio del ejercicio anterior? ¿Cuál será el término de mayor grado?

HAZ UN ESQUEMA

COMBINATORIA

La **combinatoria** se ocupa de contar los diferentes modos en que se puede llevar a cabo una tarea de ordenación o agrupación de varios objetos siguiendo unas reglas prefijadas. Para ese recuento se pueden utilizar diversas estrategias, la más importante de las cuales es el diagrama en árbol.

El **diagrama en árbol** permite desplegar, paso a paso, todas las posibilidades que pueden darse en ciertos problemas en los que se trata de agrupar adecuadamente elementos de varios conjuntos o de un mismo conjunto. Con él se puede pensar paso a paso y ver con claridad cuántas posibilidades se dan en cada paso.

TIPOS DE AGRUPACIONES

VARIACIONES CON REPETICIÓN

Son las agrupaciones ordenadas de n elementos que se pueden formar a partir de m elementos distintos. Pueden repetirse e influye el orden.

$$VR_{m,\,n} = m^n$$

VARIACIONES

Son las agrupaciones ordenadas de n elementos no repetidos que se pueden formar a partir de un conjunto de m elementos distintos.

$$V_{m,\,n} = m \cdot (m-1) \ \ldots \ (n \text{ factores decrecientes})$$

PERMUTACIONES

Son las distintas formas en que se pueden ordenar los m elementos de un conjunto.

$$P_m = V_{m,\,m} = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

COMBINACIONES

Son los distintos subconjuntos de n elementos que se pueden obtener de un conjunto de m elementos. No influye el orden. No se pueden repetir.

$$C_{m,\,n} = \frac{V_{m,\,n}}{P_n} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot \ldots}{n\,(n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

FACTORIALES Y NÚMEROS COMBINATORIOS

Factoriales: $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.

Números combinatorios: $\binom{m}{n} = \dfrac{m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{n!}$

Propiedades: $\binom{m}{0} = 1; \quad \binom{m}{m} = 1$

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$$

$$\binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} = \binom{m}{n}$$

El **triángulo de Tartaglia** sintetiza interesantes propiedades de los números combinatorios:

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

EJERCICIOS DE LA UNIDAD

PRACTICA

Formar agrupaciones

1 ▲△△ En una urna hay una bola blanca, una roja y una negra. Las extraemos de una en una. Escribe todos los posibles resultados que podemos obtener.

2 ▲△△ Dos amigos juegan al tenis y acuerdan que será vencedor el primero que logre ganar dos sets. ¿De cuántas formas puede desarrollarse el partido? Escríbelas.

3 ▲△△ Forma todos los números de cuatro cifras que se puedan hacer con los dígitos 1 y 2.

4 ▲△△ Si queremos hacer lápices bicolores de doble punta y disponemos de los colores rojo, azul, negro, verde y morado, ¿cuántos modelos se pueden formar? Escríbelos todos.

5 ▲△△ ¿Qué números de dos cifras diferentes se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5?

6 ▲△△ Queremos construir un dominó con los números 1, 2, 3, 4 y 5. Describe sus fichas.

7 ▲△△ Si tienes tres pantalones y cuatro camisetas, ¿de cuántas formas puedes vestirte? Descríbelas todas.

Utilizar las fórmulas

8 ▲△△ Las expresiones $VR_{8,2}$; P_8; $V_{8,2}$; $C_{8,2}$ son las soluciones de los siguientes apartados a), b), c), d), pero no en ese orden. Asigna a cada apartado su solución:

a) Palabras de 8 letras, con o sin sentido, que se pueden hacer con las letras de PELÍCANO.

b) Posibles parejas que se pueden formar para jugar un torneo de ajedrez entre 8 personas.

c) Números de 2 cifras que se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

d) Posibles formas de dar el primer y segundo premios de un concurso literario en el que participan 8 personas.

9 ▲△△ Calcula:

a) $VR_{4,3}$ b) $VR_{3,4}$ c) $V_{7,3}$ d) P_7

e) $C_{6,4}$ f) $V_{9,5}$ g) $\dfrac{P_{10}}{P_8}$ h) $C_{10,8}$

10 ▲△△ Halla:

a) $V_{5,2} - C_{5,3}$ b) $\dfrac{VR_{6,2}}{C_{4,2}}$ c) $\dfrac{P_4}{V_{4,3}}$

d) $\dfrac{5!}{3!}$ e) $\dfrac{20!}{19!}$ f) $\dfrac{P_{12}}{P_9}$

PIENSA Y RESUELVE

11 ▲▲△ EJERCICIO RESUELTO

¿De cuántas formas pueden repartise 3 entradas para un concierto de rock entre 6 amigos y amigas sin que ninguno pueda llevarse más de una?

Resolución

Llamemos A, B, C, D, E, F a los amigos.

El grupo ABC es el mismo que los grupos ACB, BAC, BCA, CAB, CBA, pues en los seis casos las entradas son para A, B y C. Por tanto, no influye el orden.

- Tenemos 6 elementos.
- Se forman grupos de 3 elementos.
- No pueden repetirse.
- No influye el orden.

Son combinaciones: $C_{6,3} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$

Hay 20 formas de repartir las entradas.

12 ▲▲△ Para formar un equipo de baloncesto hacen falta 5 jugadores y el entrenador dispone de 10.

a) ¿Cuántos equipos distintos puede formar?

b) Si elige a dos jugadores y los mantiene fijos, ¿cuántos equipos distintos podrá hacer con los ocho que le quedan?

13 ▲▲△ Se van a celebrar elecciones en la Asociación de Padres y hay que elegir al presidente, secretario y tesorero. ¿De cuántas maneras se pueden elegir estos tres cargos, si se presentan ocho candidatos?

4ºc 4ºA

14 ▲▲△ Se van a repartir tres regalos entre seis per- 4ªA sonas. Calcula de cuántas formas se pueden repartir en cada uno de los siguientes casos:

a) Los regalos son distintos (una bicicleta, unos patines y un chandal) y no puede tocarle más de un regalo a la misma persona.

b) Los regalos son iguales y no puede tocarle más de un regalo a la misma persona.

c) Los regalos son distintos y puede tocarle más de uno a la misma persona.

15 ▲▲△ Los participantes de un concurso tienen que ordenar a ciegas seis tarjetas en las que está escrita cada una de las letras de la palabra PREMIO.

a) ¿Cuántas ordenaciones distintas pueden salir?

b) Les ofrecen fijar la P en el lugar que le corresponde y reducir el premio a la mitad. ¿Cuántas ordenaciones posibles se pueden obtener de esta forma?

4ºC 4ºA 16 ▲△△ Calcula cuántos productos de tres factores distintos podemos formar con estas cifras:

1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7

17 ▲▲△ ¿De cuántas formas pueden sentarse tres personas en un banco de 5 asientos?

¿Y si el banco es de 3 asientos?

18 ▲△△ Estás haciendo la maleta para irte de vaca- 4ªA ciones y quieres llevarte cuatro de las ocho camisetas que tienes.

¿De cuántas formas las puedes seleccionar?

19 ▲△△ El lenguaje de un ordenador se traduce a 4ªA secuencias de dígitos formados por ceros y unos. Un *byte* es una de estas secuencias y está formado por 8 dígitos.

Por ejemplo: | 0 0 1 0 0 0 1 1 |

¿Cuántos *bytes* diferentes se pueden formar?

20 ▲▲△ Las 28 fichas de un dominó se reparten entre cuatro jugadores. ¿Cuántos juegos distintos podrá tener cada jugador?

21 ▲▲△ EJERCICIO RESUELTO

Seis amigos, 3 chicos y 3 chicas, van al cine. ¿De cuántas formas pueden sentarse si quieren estar alternados?

Resolución

Llamemos A, B, C a los chicos y 1, 2, 3 a las chicas. Una posible colocación es B2A1C3.

- Los chicos pueden colocarse en los lugares impares de $P_3 = 6$ formas distintas.
- Las chicas pueden colocarse en los lugares pares de $P_3 = 6$ formas.
- Por cada forma de colocarse los chicos, hay 6 formas de sentarse las chicas.

  Son $6 \times 6 = 36$ formas.
- Si son las chicas las que ocupan los lugares impares y los chicos ocupan los pares, habrá otras 36 formas.

En total: $2 \times P_3 \times P_3 = 72$ formas de sentarse alternados.

22 ▲▲△ a) ¿De cuántas formas se pueden ordenar 4ªA las letras de la palabra PALOTE?

b) ¿Cuántas empiezan por P?

c) ¿En cuántas de ellas ocupan las consonantes los lugares impares y las vocales los pares? (Por ejemplo: PATELO).

23 ▲▲△ En unos almacenes emplean el siguiente código para marcar los artículos: la primera cifra indica la sección correspondiente y es un número entre el 1 y el 9; después hay tres cifras que corresponden al número del vendedor.

¿Cuántas marcas distintas se pueden hacer?

24 ▲▲△ Para matricularte en un curso, tienes que elegir dos asignaturas entre las siguientes:

Música	Tecnología
Teatro	Dibujo
Informática	Periodismo

a) ¿De cuántas formas puedes hacer la elección?

b) Si en secretaría te advierten que las escribas por orden de preferencia, ¿de cuántas formas las puedes escribir?

EJERCICIOS DE LA UNIDAD

25 ▲▲△ Señala 8 puntos en una circunferencia. Traza las cuerdas que unen cada punto con todos los demás.

a) ¿Cuántas cuerdas tendrás que dibujar?

b) ¿Cuántas serán si duplicamos el número de puntos?

26 ▲△△ El profesor de Matemáticas nos ha propuesto diez problemas de los que tenemos que resolver cinco.

a) ¿Cuántas formas hay de seleccionarlos?

b) De los 10 problemas propuestos hay 2 de los que no tienes "ni idea". ¿Se reducen mucho las posibilidades de selección?

27 ▲▲△ ¿Cuántos grupos de 4 cartas distintas se pueden hacer con una baraja española? ¿Cuántos de ellos están formados por 4 FIGURAS? ¿En cuántos serán OROS las 4 cartas?

28 ▲△△ Si quisieras tener la seguridad de acertar los 6 números de la combinación ganadora de la Lotería Primitiva, ¿sabes cuántos boletos tendrías que rellenar? (En cada boleto se marcan 6 números comprendidos entre el 1 y el 49).

29 ▲▲△ Las matrículas de los automóviles españoles llevan cuatro números y tres letras. Para ello se utilizan los dígitos del 0 al 9 y 26 letras de nuestro alfabeto.

¿Cuántas matrículas pueden hacerse de esta forma?

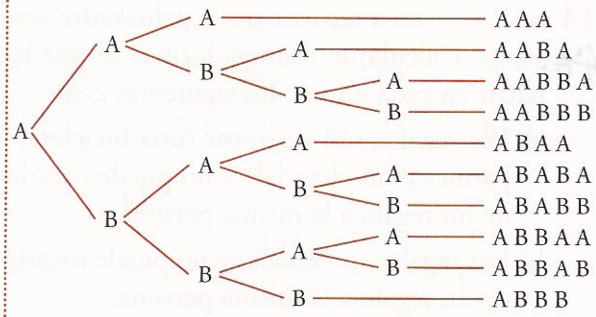
30 ▲▲△ Me van a regalar 3 libros y 2 discos por mi cumpleaños. He hecho una lista con los que me gustaría tener, y en ella anoté 5 libros y 8 discos. ¿De cuántas formas distintas pueden elegir mi regalo?

31 ▲▲△ EJERCICIO RESUELTO

Dos amigos se enfrentan en un torneo de tenis, en el que será vencedor el primero que logre ganar tres sets. ¿De cuántas formas posibles puede desarrollarse el encuentro?

Resolución

Anotemos, en un diagrama en árbol, el ganador de cada set.



Si el primer set lo gana A, hay 10 posibles desarrollos del torneo.

¿Cuántos habrá si empieza ganando B? ¿Cuántas formas posibles hay en total?

Observa que, en este caso, el diagrama en árbol no es regular, pues unas veces el torneo termina con 3 sets y otras con 4 ó 5. Por ello, hemos desarrollado el diagrama hasta el final.

32 ▲▲△ En una urna hay dos bolas blancas, una negra y una roja. Extraemos sucesivamente una bola cada vez y paramos cuando tengamos las dos blancas. ¿Cuáles son los posibles resultados?

33 ▲▲△ El número 75775 está formado por dos cincos y tres sietes. ¿Cuáles son los números que podemos formar con dos cincos y tres sietes?

34 ▲▲△ Con las letras de la palabra CASA, ¿cuántas ordenaciones, con o sin sentido, podemos formar? Escríbelas todas.

35 ▲△△ Calcula x en cada una de las siguientes expresiones:

a) $\binom{10}{3} = \binom{10}{x}$ b) $\binom{x}{7} = \binom{x}{8}$

c) $\binom{9}{2} = \binom{9}{x-2}$ d) $\binom{11}{5} + \binom{11}{x} = \binom{12}{5}$

e) $\binom{13}{x} = \binom{13}{x-1}$ f) $\binom{18}{7} + \binom{x}{8} = \binom{19}{8}$

36 ▲△△ Resuelve:

a) $\binom{25}{3+2x} = \binom{25}{x-2}$ b) $\binom{17}{3x-2} = \binom{17}{x-1}$

c) $\binom{23}{x} + \binom{23}{y} = \binom{24}{8}$ d) $\binom{19}{x} + \binom{19}{x+1} = \binom{20}{7}$

37 Desarrolla:

a) $(x-3)^5$ b) $(2x-1)^4$ c) $(2x+3)^3$

38 Calcula el cuarto término en cada caso:

a) $(2x-5)^5$ b) $\left(\frac{x}{2}+3\right)^6$ c) $(x^2-2x)^3$

39 En el desarrollo del binomio $(x^2-3x)^6$ escribe el tercero y el quinto términos.

40 Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{x!}{(x-2)!}$ b) $\dfrac{(x+1)!}{(x-1)!}$ c) $\dfrac{4x!}{3(x-1)!}$

REFLEXIONA SOBRE LA TEORÍA

41 a) En $V_{m,n}$, ¿puede ser $m=n$? ¿Y $m<n$?

b) En $VR_{m,n}$, ¿puede ser $m=n$? ¿Y $m<n$?

42 ¿Qué relación tiene que existir entre a y b para que se verifique la igualdad $\binom{m}{a}=\binom{m}{b}$?

43 Calcula razonadamente el valor de:

$$\binom{1000}{999} \text{ y } \binom{1000}{998}$$

44 a) Escribe el triángulo de Tartaglia hasta la fila octava.

b) Suma todos los términos de cada una de las filas del triángulo anterior y obtendrás, respectivamente, 2, 2^2, 2^3, …, 2^8.

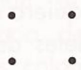
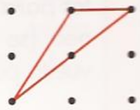
c) Calcula: $\binom{8}{0}+\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\ldots+\binom{8}{7}+\binom{8}{8}$

d) Halla: $\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+\ldots+\binom{m}{m}$

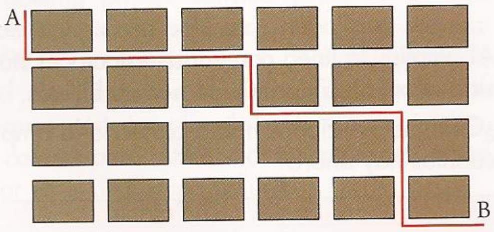
PROFUNDIZA

45 Tenemos 5 pesas de 1 g, 2 g, 4 g, 8 g y 16 g. ¿Cuántas pesadas diferentes se pueden hacer tomando dos de ellas? ¿Y con tres? Calcula cuántas pesadas se pueden hacer, en total, tomando 1, 2, 3, 4 o las 5 pesas.

46 ¿Cuántos triángulos se pueden hacer de modo que tengan los vértices en los puntos de estas redes?

a)  b)  c) 

47 Esta cuadrícula representa el plano de un barrio de una ciudad. ¿Cuántos caminos de longitud mínima hay para ir de A a B?



48 En una pizzería preparan pizzas con, al menos, 4 ingredientes. Si disponen de 6 tipos de ingredientes, ¿cuántos tipos de pizza se pueden preparar? (Ten en cuenta que las pueden hacer de 4, 5 ó 6 ingredientes).

49 Un secretario ha escrito cinco cartas distintas dirigidas a cinco personas. También escribe los cinco sobres correspondientes y mete al azar cada carta en un sobre.

a) ¿De cuántas formas posibles se pueden meter las cartas en los sobres?

b) ¿En cuántos casos la carta del señor Pérez estará dentro de su sobre?

50 EJERCICIO RESUELTO

Resuelve la ecuación: $C_{x+1,\,2}=6\,P_3$

Resolución

$$C_{x+1,\,2}=6\,P_3 \rightarrow \frac{(x+1)\,x}{1\cdot 2}=6\cdot 6 \rightarrow x^2+x=72$$

$$x^2+x-72=0 \begin{cases} x=8 \\ x=-9 \end{cases}$$ No vale; x tiene que ser mayor que 0.

Comprobamos: $C_{9,\,2}=\dfrac{9\cdot 8}{2}=36=6\cdot P_3$

51 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $C_{x,2}=10$ b) $C_{x,2}-C_{x-1,\,2}=7$

c) $V_{x,2}-VR_{x,2}=3x-20$ d) $\dfrac{12\,(x-2)!}{x!}=1$