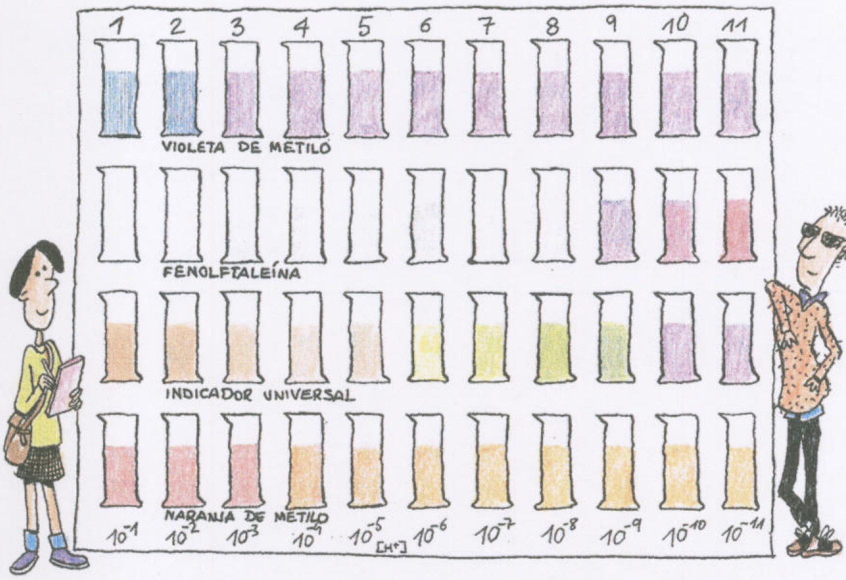
3 LOGARITMOS: SÉPTIMA OPERACIÓN



Hasta ahora has dedicado tus esfuerzos a dominar las seis primeras operaciones aritméticas: **suma, resta, multiplicación, división, potenciación** y **radicación.** La séptima y última operación está relacionada con las potencias de números. Observa nuevamente el siguiente diagrama:

$$3^2=9$$

$3^2=x$	$x^2=9$	$3^x=9$
Potenciación	Radicación	Exponenciación

A partir de la relación $3^2=9$ se obtienen tres operaciones según el número que queramos hallar:

— La **potenciación**, que tiene por objetivo hallar la potencia.

— La **radicación**, que tiene por objeto hallar la base.

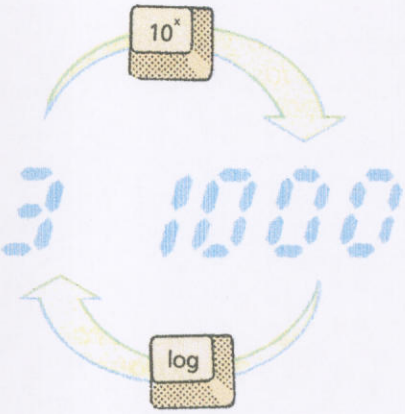
— La **exponenciación**, que tiene por objeto hallar el **exponente.** El exponente recibe también el nombre de **logaritmo** y la operación correspondiente, **logaritmación.**

La potenciación tiene dos operaciones inversas; esto es así porque ésta operación no cumple la propiedad conmutativa, cosa que sucede en la suma y en el producto.

LOS LOGARITMOS TIENEN COLOR

En la figura se muestra la concentración de iones hidrógeno, H^+, en una disolución y la reacción según los indicadores utilizados. El número de iones de la concentración está dado en potencias de 10: 10^{-1}, 10^{-2}, ... 10^{-14}. El ***pH*** *es una medida de la concentración de estos iones, y como puedes observar es el* ***número opuesto del exponente,*** *o como luego verás, el opuesto del logaritmo. El pH mide el carácter ácido o básico de los jabones, lociones, champús, etc. El* ***pH****= 7 se dice que es neutro y suele recomendarse en los productos de belleza.*

1. NOTACIÓN LOGARÍTMICA DE LOS NÚMEROS



Las potencias de 10 ayudan a manejar los números y a tener una idea aproximada de los mismos según el orden de las potencias entre las que está comprendido. Es evidente que puede utilizarse otra base cualquiera.

Todo número real positivo puede escribirse en la forma:

$$2^x,\ 3^x,\ 5^x,\ 10^x,\ \left(\frac{1}{2}\right)^x,\ \ldots,\ a^x$$

siendo la base un número positivo (> 0) y distinto de 1.

Comprueba con tu calculadora que, por ejemplo,

$$2 = 10^{0{,}30103\ldots},\quad 4 = 10^{0{,}60206\ldots},\quad 500 = 10^{2{,}69897\ldots}$$

Observa que el exponente no es, en general, un número entero. Fijada la base, cada número real positivo queda determinado por su **exponente**. El exponente, en esta notación, se llama también **logaritmo**.

$N = a^x \Leftrightarrow x = \log_a N$

El logaritmo en base a de un número N es el exponente a que hay que elevar la base para que dé dicho número.

Por ejemplo, si $1\,000 = 10^3$, decimos que 3 es el logaritmo de 1000 en base 10. Se escribe así:

$$\log_{10} 1\,000 = 3 \text{ ya que } 10^3 = 1\,000$$

Los logaritmos en base 10 se llaman **decimales.** En este caso no suele escribirse la base. La base 10 puede sustituirse por otro número cualquiera mayor que 0 y distinto de 1.

$$\log_3 81 = 4 \text{ ya que } 3^4 = 81$$

Potencias de base 2	Número	Logaritmo de base 2
...	...	...
2^4	16	4
2^3	8	3
2^2	4	2
2^1	2	1
$2^{\frac{1}{2}}$	1,41...	$\frac{1}{2}$
...	...	...
2^0	1	0
...	...	...
$2^{-\frac{1}{2}}$	0,70...	$-\frac{1}{2}$
2^{-1}	0,5	-1
$2^{-\frac{3}{2}}$	0,35...	$-\frac{3}{2}$
2^{-2}	0,25	-2
2^{-3}	0,125	-3
2^{-4}	0,0625	-4
...	...	...

▶ **Consecuencias inmediatas de la definición**

1. **El logaritmo de 1 es 0 (en cualquier base).**
2. **El logaritmo de la base es 1.**
3. **Sólo tienen logaritmo los números positivos.**

Una observación que te ayudará:

Para calcular el logaritmo de un número en una base considera que vale x y pasa a la forma potencial expresando el número en dicha base. Razona los pasos de los siguientes ejercicios:

1. $\log_3 81 = x \Leftrightarrow 3^x = 81 = 3^4$ de donde $x = 4$.
2. $\log_2 128 = x \Leftrightarrow 2^x = 128 = 2^7$ de donde $x = 7$.
3. $\log_3 \sqrt{243} = x \Leftrightarrow 3^x = \sqrt{243} = (3^5)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{5}{2}}$ de donde $x = \frac{5}{2}$.
4. $\log_5 625 = x \Leftrightarrow 5^x = 625 = 5^4$ de donde $x = 4$.

2. PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Las propiedades de los logaritmos son las propiedades de las potencias cuando los números se escriben en **forma logarítmica.**

Aquí se utiliza la base decimal, pero los resultados son válidos para cualquiera otra base.

▶ Logaritmo de un producto

Números	N	M	NM
En base 10	10^x	10^y	10^{x+y}
Logaritmo	x	y	x+y
	log N + log M = log NM		

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

▶ Logaritmo de un cociente

Números	N	M	N/M
En base 10	10^x	10^y	10^{x-y}
Logaritmo	x	y	x−y
	log N − log M = log N/M		

El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos del dividendo y del divisor.

▶ Logaritmo de una potencia

Números	N	M^m
En base 10	10^x	$(10^x)^m = 10^{mx}$
Logaritmo	x	m · x
	log N^m = m · log N	

El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base.

Una observación ociosa: Las raíces son potencias de exponente fraccionario.

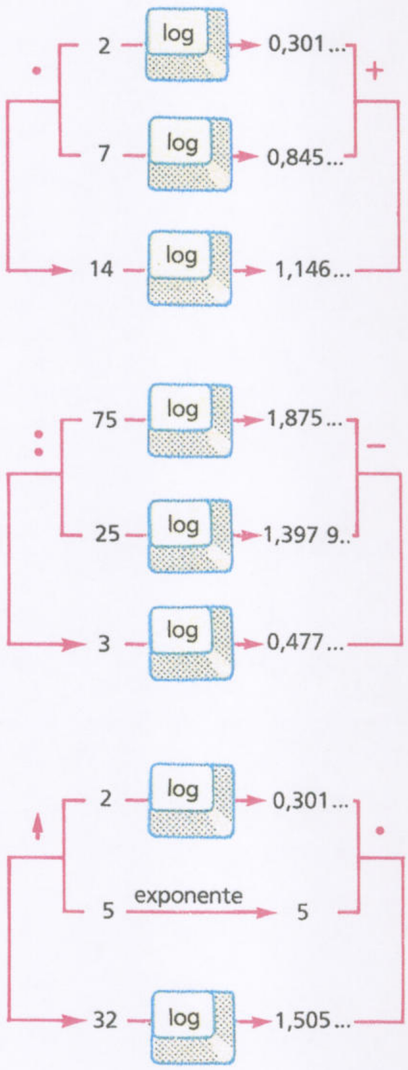
1. $\log \sqrt{3} = \log 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log 3$

2. $\log \sqrt[3]{7} = \frac{1}{3} \cdot \log 7$

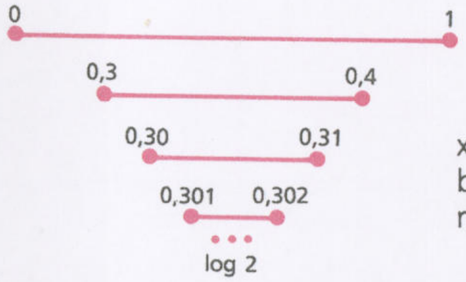
RECUERDA

1	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2	$a^m : a^n = a^{m-n}$
3	$(a^m)^n = a^{mn}$

OPERANDO



OTRA VEZ INTERVALOS ENCAJADOS



3. CALCULANDO LOGARITMOS

Piensa en las siguientes equivalencias:

$$
\begin{aligned}
100 < 500 < 1000 &\Leftrightarrow 10^2 < 10^x < 10^3 \\
&\Leftrightarrow 2 < x < 3 \\
&\Leftrightarrow 2 < \log\ 500 < 3
\end{aligned}
$$

La determinación del logaritmo de un número se hace por aproximaciones, lo mismo que en las potencias y raíces reales. Aquí probamos la existencia del logaritmo; el cálculo efectivo se hace por otros métodos que caen fuera de este curso.

La utilización práctica de los logaritmos exige el empleo de calculadoras o tablas, lo mismo que sucede cuando se manejan raíces o potencias no inmediatas.

Un modelo: ¿Cómo se calcula el logaritmo de 2 en base 10?

Razona cada uno de los siguientes pasos y utiliza la calculadora (tecla y^x) para comprobarlo. Por ejemplo:

LOGARITMOS DECIMALES				
Interv. de potencias		Interv. numéricos		Interv. logarítmicos
$10^0 < 2 < 10^1$	$\Leftrightarrow$	$1 < 2 < 10$	$\Leftrightarrow$	$0 < \log 2 < 1$
$10^{0,3} < 2 < 10^{0,4}$	$\Leftrightarrow$	$1,99 < 2 < 2,51$	$\Leftrightarrow$	$0,3 < \log 2 < 0,4$
$10^{0,30} < 2 < 10^{0,31}$	$\Leftrightarrow$	$1,995 < 2 < 2,04$	$\Leftrightarrow$	$0,30 < \log 2 < 0,31$
$10^{0,301} < 2 < 10^{0,302}$	$\Leftrightarrow$	$1,9998 < 2 < 2,004$	$\Leftrightarrow$	$0.301 < \log 2 < 0,302$
$\ldots < 2 < \ldots$	$\Leftrightarrow$	$\ldots < 2 < \ldots$	$\Leftrightarrow$	$\ldots < \log 2 < \ldots$

Siguiendo este **proceso de tanteo** te acercas cada vez más al verdadero valor de log 2. Al aumentar el número de cifras, el error que se comete es cada vez más pequeño y se aproxima a 0.

— Cada uno de estos pasos determina un intervalo, dentro del cual se encuentra log 2:

$$
\begin{aligned}
&\log 2 \in [0,\ 1] \\
&\log 2 \in [0{,}3,\ 0{,}4] \\
&\log 2 \in [0{,}30,\ 0{,}31] \\
&\log 2 \in [0{,}301,\ 0{,}302] \\
&\log 2 \in [\ldots,\ \ldots]
\end{aligned}
$$

— Cada intervalo está contenido en el anterior.

— La diferencia entre los extremos del intervalo se aproxima a 0.

Se tiene así una **sucesión de intervalos de aproximación** (o **encajados**). El número real que determina es log 2.

Este proceso es válido para cualquier número y cualquier base.

Fijada una base positiva y distinta de 1, a cada número real positivo le corresponde un logaritmo, y recíprocamente.

¿SABÍAS QUE...?

Las palabras **característica** (parte entera del logaritmo) y **mantisa** (parte decimal del logaritmo), que todavía se utilizan hoy en muchos textos, se deben a Briggs y aparecen por primera vez en su libro *Arithmetica logarithmica,* publicado en 1624, en el que da los logaritmos de los números del 1 al 20 000 y del 90 000 al 100 000, siempre con 14 cifras decimales.

4. CAMBIO DE BASE

Conocidos los logaritmos en una base se pueden hallar fácilmente en cualquiera otra. La base que se utiliza en la práctica es 10: **logaritmos decimales**.

Por ejemplo, queremos hallar en base 2 el logaritmo de un número N; es decir:

$$x = \log_2 N \Leftrightarrow N = 2^x$$

Para calcular x tomamos logaritmos decimales en los dos miembros:

$$\log N = \log 2^x \Leftrightarrow \log N = x \log 2$$

de donde: $x = \dfrac{\log N}{\log 2}$ luego: $\log_2 N = \dfrac{\log N}{\log 2}$

Análogamente, los logaritmos en base 3 y 5 del número N (compruébalo) son:

$$\log_3 N = \frac{\log N}{\log 3} \qquad \log_5 N = \frac{\log N}{\log 5}$$

Si las bases son menores que 1, por ejemplo, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{5}$, los logaritmos del número A son:

$$\log_{\frac{1}{2}} N = \frac{\log N}{\log\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\log N}{(-\log 2)} = -\frac{\log N}{\log 2}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} N = \frac{\log N}{\log\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{\log N}{(-\log 3)} = -\frac{\log N}{\log 3}$$

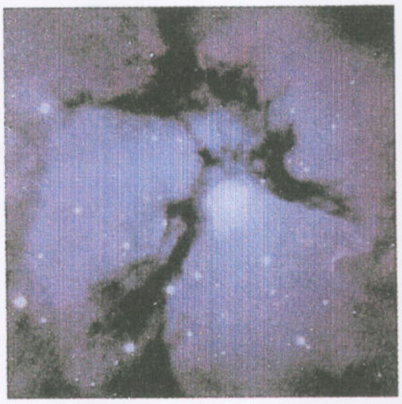
$$\log_{\frac{1}{5}} N = \frac{\log N}{\log\left(\frac{1}{5}\right)} = \frac{\log N}{(-\log 5)} = -\frac{\log N}{\log 5}$$

Y en general:

$$\boxed{\begin{array}{l} \log_a N = \dfrac{\log N}{\log a} \ (a>1) \\ \log_{\frac{1}{a}} N = -\dfrac{\log N}{\log a} \ (a>1) \end{array}}$$

Dos resultados importantes:

1. **Solamente se necesita conocer los logaritmos en una base; los demás se obtienen aplicando el proceso anterior.**
2. **Los logaritmos de un número en bases inversas $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ son opuestos.**



ESCALA LOGARÍTMICA

Las potencias de 10 que rigen el sistema decimal son, en esencia, una escala logarítmica cuando se utilizan únicamente los exponentes. Así, cuando se dice que el radio del Universo es de orden 25, se indica que su valor es $\approx 10^{25}$ m.

Con estos prefijos se puede medir hasta 42 órdenes de longitud, masa, tiempo, etc. Esto permite realizar un fantástico viaje desde las remotas galaxias hasta las profundidades del átomo.

LOGARITMOS — ÓRDENES

exa	10^{18}	18
peta	10^{15}	15
tera	10^{12}	12
giga	10^{9}	9
mega	10^{6}	6
miria	10^{4}	4
kilo	10^{3}	3
hecto	10^{2}	2
deca	10^{1}	1
	10^{0}	0
deci	10^{-1}	−1
centi	10^{-2}	−2
mili	10^{-3}	−3
micro	10^{-6}	−6
nano	10^{-9}	−9
pico	10^{-12}	−12
fento	10^{-15}	−15
ato	10^{-18}	−18

RECUERDA

1	$\log(MN) = \log M + \log N$
2	$\log(M/N) = \log M - \log N$
3	$\log N^m = m \log N$

5. OPERANDO CON LOGARITMOS

Los logaritmos son números reales: log 2 es un número, lo mism que 2, $\frac{2}{3}$, $\sqrt{2}$, etc., y debe dejarse así ya que se trata de un númer irracional, a no ser que se pida una aproximación.

Las expresiones numéricas en las que aparecen logaritmos se pue den reducir utilizando las propiedades de las operaciones aritmética y las tres propiedades de los logaritmos.

En relación con esta cuestión conviene saber también **lo que n se puede hacer,** ya que los errores son muy frecuentes.

— No se puede reducir $\log 2 + \log 3$ (sin operar previamente)

$\log 2 + \log 3 = \log (2 \cdot 3) = \log 6$
$\log 2 + \log 3 \neq \log 5$

— No se puede reducir $\log 6 - \log 2$ (sin operar previamente)

$\log 6 - \log 2 = \log (6 : 2) = \log 3$
$\log 6 - \log 2 \neq \log 4$

— Observa las siguientes desigualdades:

$$1 + \log 2 \neq \log 3$$
$$\|$$
$$\log 10 + \log 2 = \log (10 \cdot 2) = \log 20$$

$$3 - \log 2 \neq 1$$
$$\|$$
$$\log 1\,000 - \log 2 = \log (1\,000 : 2) = \log 500$$

— **Para reducir logaritmos por suma o diferencia tienen que ser homogéneos (semejantes), es decir, misma base y mismo número.**

Es correcta la siguiente suma en la que los sumandos son homogéneos:

$$3 \log 2 + 5 \log 2 = 8 \log 2$$

Lo mismo sucede con la siguiente diferencia:

$$5 \log 2 - 3 \log 2 = 2 \log 2$$

Justifica los pasos de los ejercicios siguientes:

1. $\mathbf{5 \log 2 - 3 \log 2} = 2 \log 2 = \log 2^2 = \log 4$
2. $\mathbf{\log x^3 - \log x^2} = 3 \log x - 2 \log x = \log x$
3. $\mathbf{\log 3 + \log 4 - \log 2} = \log 3 + 2 \log 2 - \log 2 = \log 3 + \log 2 = \log 6.$
4. $\mathbf{A = (\log 27 + \log 64) - (\log 8 - \log 9)}$

$= 3 \log 3 + 6 \log 2 - 3 \log 2 + 2 \log 3$
$= 5 \log 3 + 3 \log 2$
$= 5 \log 3 + \log 8$
$= \log 3^5 \cdot 8$

UN RESULTADO CURIOSO

¿Cómo se expresa cualquier número entero y positivo mediante tres doses y signos matemáticos?

Puesto que puede resultar difícil, te damos la solución para tres números. La generalización es fácil.

Comprueba que:

$3 = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$

$5 = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}$

$7 = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}}}$

PROBLEMAS RESUELTOS

1 **Demuestra que los números 2, 20, 200, 2 000... tienen logaritmos cuya parte decimal es la misma.**

Aplicando las propiedades de los logaritmos se tiene:

$\log 20 = \log(10 \cdot 2) = \log 10 + \log 2 = 1 + \log 2$

$\log 200 = \log(100 \cdot 2) = \log 100 + \log 2 = 2 + \log 2$

$\log 2\,000 = \log(1\,000 \cdot 2) = \log 1\,000 + \log 2 = 3 + \log 2$

$\log 20\,000 = \log(1\,0000 \cdot 2) = \log 10\,000 + \log 2 = 4 + \log 2$

Luego, todos los números tienen la parte decimal de log 2.

2 **Sabiendo que $\log 2 = 0{,}3$, calcula:**

1. log 8 2. log 5 3. log 125 4. log 0,64

1. $\log 8 = \log (2^3 = 3 \log 2 = 0{,}9.$
2. $\log 5 = \log (10 : 2) = \log 10 - \log 2 = 1 - 0{,}3 = 0{,}7.$
3. $\log 125 = \log (1\,000 : 8) = \log 1\,000 - 3 \log 2 = 3 - 3 \cdot 0{,}3 = 3 - 0{,}9 = 2{,}1.$
4. $\log 0{,}64 = \log (64 : 100) = \log 64 - \log 100 = 6 \log 2 - 2 = 6 \cdot 0{,}3 - 2 = 1{,}8 - 2 = -0{,}2.$

3 **Toma logaritmos decimales en las siguientes expresiones:**

1. $A = xyz$
2. $B = x^2y^2z^2$
3. $C = \dfrac{x^3y}{x^5}$
4. $D = \sqrt{x^3yx^5}$

1. $\log A = \log xyz = \log x + \log y + \log z$
2. $\log B = \log x^2y^2z^2 = \log x^2 + \log y^2 + \log z^2 = 2 \log x + 2 \log y + 2 \log z$
3. $\log C = \log \dfrac{x^3y}{z^5} = \log x^3 + \log y - \log z^5 = 3 \log x + \log y - 5 \log z.$
4. $\log D = \log \sqrt{x^3yz^5} = \dfrac{1}{2} [\log x^3 + \log y + \log z^5] = \dfrac{3}{2} \log x + \dfrac{1}{2} \log y + \dfrac{5}{2} \log z$

4 **Calcula los logaritmos en base 5 de los siguientes números utilizando la calculadora:**

1. 123 2. 7 3. 500

Recuerda la fórmula del cambio de base.

1. $\log_5 123 = \dfrac{\log\ 123}{\log\ 5} = 2{,}99$
2. $\log_5 7 = \dfrac{\log\ 7}{\log\ 5} = 1{,}21$
3. $\log_5 500 = \dfrac{\log\ 500}{\log\ 5} = 3{,}86$

A C T I V I D A D E S

Ejercicios para entrenarse

1 Escribe en potencias de 2 los siguientes números:

1. 2, 4, 8, 32, 128 **2.** $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$

2 Escribe en potencias de 3 los siguientes números:

1. 3, 9, 27, 81, 243 **2.** $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$

3 Escribe en potencias de 10 los siguientes números:

1. 10, 100, 1 000, 10 000

2. $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$

4 Escribe en forma de potencia de base 10:

1. 0,1; 0,01; 0,0001

2. 1 millón, 1 billón, 1 trillón.

3. 1 milésima, 1 millonésima, 1 trillonésima.

5 Escribe en potencias de $\frac{1}{2}$ los siguientes números:

1. 2, 4, 8, 32, 128 **2.** $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$

6 Escribe en potencias de $\frac{1}{3}$ los siguientes números:

1. 3, 9, 27, 81, 243 **2.** $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$

7 Escribe en notación logarítmica de base 5 los siguientes números:

1. 1, 5, 25, 125 **2.** $\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{25}{3\,125}$

8 Calcula los siguientes logaritmos:

1. $\log_2 4$, $\log_2 64$,. $\log_2 128$

2. $\log_2 \frac{1}{2}$, $\log_2 \frac{1}{4}$, $\log_2 \frac{1}{16}$

3. $\log_2 \sqrt{2}$, $\log_2 \sqrt{8}$, $\log_2 \sqrt[3]{2}$

9 Calcula los siguientes logaritmos:

1. $\log_3 3$, $\log_3 27$, $\log_3 81$

2. $\log_3 \frac{1}{3}$, $\log_3 \frac{1}{9}$, $\log_3 \frac{1}{27}$

3. $\log_3 \sqrt{3}$, $\log_3 \sqrt{27}$, $\log_3 \sqrt[3]{3}$

10 Calcula los siguientes logaritmos:

1. $\log 1$, $\log 10$, $\log 100$

2. $\log \frac{1}{10}$, $\log \frac{1}{100}$, $\log \frac{1}{1\,000}$

3. $\log 0{,}1$, $\log 0{,}01$, $\log 0{,}0000001$

4. $\log \sqrt{10}$, $\log \sqrt{100}$, $\log \sqrt[3]{10\,000}$

11 Calcula los siguientes logaritmos directamente o pasando a la base inversa:

1. $\log_{\frac{1}{2}} 4$, $\log_{\frac{1}{2}} 64$, $\log_{\frac{1}{2}} 128$

2. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16}$

3. $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$, $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{8}$, $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{2}$

12 Calcula los siguientes logaritmos directamente o pasando a la base inversa:

1. $\log_{\frac{1}{3}} 3$, $\log_{\frac{1}{3}} 27$, $\log_{\frac{1}{3}} 81$

2. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$, $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$, $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$

3. $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$, $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27}$, $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$

13 Calcula los siguientes logaritmos directamente o pasando a la base inversa:

1. $\log_{\frac{1}{10}} 1$, $\log_{\frac{1}{10}} 10$, $\log_{\frac{1}{10}} 10\,000$

2. $\log_{\frac{1}{10}} \frac{1}{10}$, $\log_{\frac{1}{10}} \frac{1}{100}$, $\log_{\frac{1}{10}} \frac{1}{1\,000}$

3. $\log_{\frac{1}{10}} 0{,}1, \quad \log_{\frac{1}{10}} 0{,}01, \quad \log_{\frac{1}{10}} 0{,}00001$

4. $\log_{\frac{1}{10}} \sqrt{10}, \quad \log_{\frac{1}{10}} \sqrt{100}, \quad \log_{\frac{1}{10}} \sqrt{10\,000}$

14 Indica entre qué potencias de 10 se encuentran los números cuyos logaritmos decimales son los siguientes:

1. 0,57, 2,36, 3,50, 4,349
2. $-0{,}2, \ -0{,}03, \ -0{,}002, \ -0{,}0004$

15 Indica el intervalo entero en que se encuentran los logaritmos decimales de los siguientes números:

1. 5, 23, 350, 2349, 234567
2. 0,2, 0,03, 0,23, 0,002, 0,0004

16 Halla la base en la cual el logaritmo de

1. 10000 es 2
2. 16 es 2
3. 125 es $\frac{3}{2}$
4. 729 es 3

17 Expresa los logaritmos de los siguientes números en función de log 2:

1. 4, 16, 32, 1024
2. $\frac{1}{2}, \ \frac{1}{16}, \ \frac{1}{32}, \ \frac{1}{1\,024}$
3. 0,5, 0,25, 0,125, 0,625
4. $\sqrt{2}, \ \sqrt{8}, \ \sqrt{\frac{1}{2}}, \ \sqrt{\frac{1}{64}}$
5. 5, 25, 125, 625

18 Expresa los logaritmos de los siguientes números en función de log 3:

1. 3, 9, 27, 59049
2. $\frac{1}{3}, \ \frac{1}{27}, \ \frac{1}{81}, \ \frac{1}{59\,049}$
3. $\sqrt{3}, \ \sqrt{9}, \ \sqrt{\frac{1}{3}}, \ \sqrt{\frac{1}{27}}$

19 Utiliza la calculadora y los logaritmos decimales para hallar:

1. El logaritmo en base 2 de 7, 27, 237
2. El logaritmo en base 5 de 7, 27, 237
3. El logaritmo en base 11 de 7, 27, 237

20 Utiliza la calculadora y en ella la tecla x^y para hallar los números cuyo logaritmo es:

1. 0,3
2. 1,3
3. 2,3
4. 3,3

¿Qué relación existe entre estos números?

21 Utiliza la calculadora y en ella la tecla x^y para hallar los números cuyo logaritmo en base 3 es:

1. 0,3
2. 1,3
3. 2,3
4. 3,3

¿Qué relación existe entre estos números?

Problemas para resolver

22 Determina los números cuyos logaritmos decimales están comprendidos entre -2 y 2.

23 Calcula:

1. $\log 2 + \log 4 + \log 8 + \log 16 + \ldots + \log 2^n$
2. Valor de dicha suma para $n = 50$.

24 Sabiendo que $\log_5 N = h$, determina el logaritmo en base 5 de $\frac{N}{125}$

25 Toma logaritmos en las siguientes expresiones:

1. $A = \frac{xyz}{t}$
2. $B = x^2 t^3 z^5 t^7$
3. $C = \frac{4\pi r^3}{3}$
4. $D = x\sqrt{y}\ \sqrt{z}$

26 Halla el valor de:

1. $\log 1\,000 - \log 0{,}001 + \log \frac{1}{1\,000}$
2. $\log 7 + \log \left(\frac{1}{7}\right)$

A

27 Pasa a forma algebraica las siguientes expresiones:

1. $\log A = \log x + \log y - \log z$
2. $\log C = 2 \log x - 3 \log y + 5 \log z$
3. $\log B = 2 \log x - \log y + 3$
4. $\log D = 1 - \log x + 3 \log z$
5. $\log E = 3 - \log 1\,000 + 2 \log x$

28 La siguiente demostración parece que es falsa (!) ya que el resultado lo es. Si manejas bien los logaritmos puedes encontrar el fallo.

— Partimos de la desigualdad: $\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$

— Expresamos la desigualdad así: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$

— Tomamos logaritmos: $\log \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \log \left(\frac{1}{2}\right)^3$

— Transformación: $2 \log \left(\frac{1}{2}\right) > 3 \log \left(\frac{1}{2}\right)$

— Simplificación por $\log \left(\frac{1}{2}\right)$: $2 > 3$

Cuestiones para aclararse

29 ¿Puede ser 0 ó 1 la base de un sistema de logaritmos?

30 ¿Verdadero o falso? ¿Por qué?

1. $\log 2 + \log 3 = \log 5$
2. $\log 2 + \log 3 = \log 6$
3. $\log 15 - \log 5 = \log 10$
4. $\log 15 - \log 5 = \log 3$

31 ¿Verdadero o falso? ¿Por qué?

1. $\log 2x + \log 1 = \log (2x + 1)$
2. $\log x + \log 10 = 3 \Leftrightarrow x \cdot 10 = 3$
3. $\log x + \log 7 = \log y \Leftrightarrow x + y = 7$

32 ¿Por qué un número negativo no puede tener logaritmo real?

33 ¿Tienen algo en común los logaritmos decimales de 2,5 y 2 500? Razónalo.

34 Tu calculadora te da los logaritmos decimales de cualquier número. ¿Cómo calcularías el logaritmo en base 7 de 23? Razona el proceso seguido.

35 Verdadero o falso. ¿Por qué?

1. $\log 100 < \log 1000$
2. $\log 0{,}01 < \log 0{,}0001$
3. $\log_3 81 < \log_9 81$
4. $\log 10\,000 < 2 \cdot \log 100$

36 ¿Qué relación existe entre los números A y B si se verifica que $\log A + \log B = 0$? Razona la respuesta.

37 ¿Qué relación existe entre los números A y B si se verifica que $\log B = \log A + \log 5$? Razona la respuesta.

38 Si $\log_a N = 2$ y $\log_a 32 \cdot N = 5$, ¿cuánto vale a? ¿Qué propiedad utilizas? Razona la respuesta.

39 Si la base de logaritmos es $\frac{1}{2}$, ¿cómo son los logaritmos de los números mayores que 1? ¿Y entre 0 y 1?

40 ¿Qué números tienen logaritmo entero en base 5? Justifica la respuesta.

41 Escribe cinco números que tengan logaritmo fraccionario en base 3. Razona la respuesta.

Actividades para profundizar

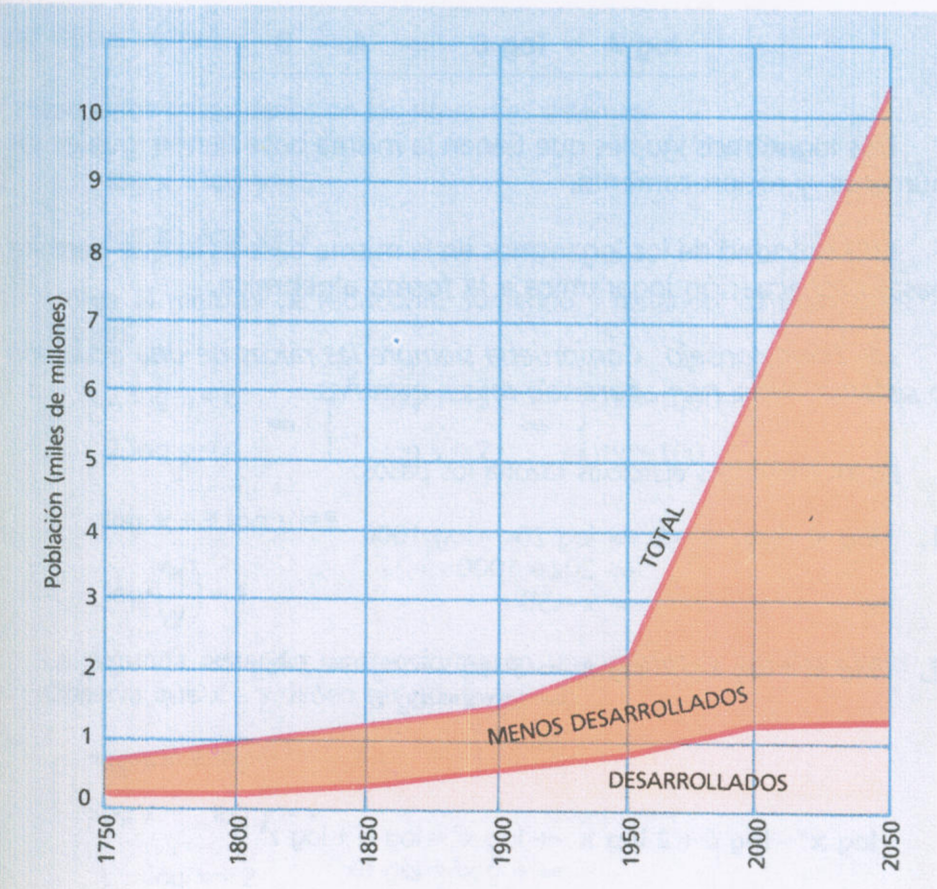
42 Demuestra que $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

43 Siendo a y b dos números enteros positivos, calcula el valor de $\log_{\frac{1}{a}} a + \log_b \frac{1}{b}$.

44 Demuestra la siguiente relación:

$$\log(a^2 - b^2) = \log ab + \log \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)$$

4 ECUACIONES LOGARÍTMICAS Y EXPONENCIALES




John Neper (1550-1617)

LA POBLACIÓN Y LOS LOGARITMOS

***Robert Malthus** escribe en 1798 el libro **Essay on the Principle of Population**, en el que establece «que los recursos naturales crecen en progresión aritmética, mientras que las poblaciones vivas tienden a crecer en progresión geométrica».*

Basándose en este principio, la fórmula que da el crecimiento de la población es de la forma $F = P(1+i)^t$, donde F es la población final, P la población en un momento dado, i la tasa de crecimiento y t el tiempo. Con esta fórmula se puede responder a cuestiones como las siguientes:

— ¿Cuánto tiempo se tardará en duplicar la población?

— ¿Depende de la población inicial P el tiempo que se emplea en duplicar la población?

Estas y otras preguntas exigen resolver una ecuación exponencial. Para ello necesitas los logaritmos.

¿SABÍAS QUE...?

La definición de logaritmo fue dada por Neper geométricamente como razón entre dos magnitudes. Su definición es diferente de la nuestra. Al principio Neper llamó los índices de potencias o exponentes «números artificiales», pero más tarde se decidió por la palabra logaritmo (razón de números) compuesta de las dos palabras griegas *logos* (razón) y aritmos (número).

1. ECUACIONES LOGARÍTMICAS CON UNA INCÓGNITA

Ecuaciones **logarítmicas** son aquellas en las que aparece la incógnita sometida a la operación logaritmo.

En la resolución de ecuaciones se aplican las reglas logarítmicas y la relación:

$$\log A = \log B \iff A = B$$

Dos logaritmos iguales que tienen la misma base tienen iguales los números, y recíprocamente.

Esta **unicidad** de los logaritmos en la misma base es lo que permite pasar una ecuación logarítmica a la **forma algebraica.**

Un buen consejo: Comprueba siempre las raíces de una ecuación o sistema por si han aparecido raíces extrañas.

En los siguientes ejercicios razona los pasos:

1. $\mathbf{\log x + \log 20 = 3} \iff \log 20x = \log 1000 \iff 20x = 1000 \iff x = 50$

2. $\mathbf{\log x^3 = \log 6 + 2 \log x} \iff 3 \log x = \log 6 + 2 \log x \iff \log x = \log 6 \iff x = 6$

También puede hacerse así:

$\mathbf{\log x^3 = \log 6 + 2 \log x} \iff \log x^3 = \log 6 + \log x^2 \Rightarrow \log x^3 = \log 6x^2 \iff x^3 = 6x^2 \iff x^2(x-6) = 0 \iff x = 0,\ x = 6$

Observa que en este proceso ha aparecido la raíz extraña $x=0$, que verifica la ecuación algebraica, pero no la logarítmica.

3. $\mathbf{2 \log x = \log(10-3x)} \Rightarrow \log x^2 = \log(10-3x) \iff x^2 = 10-3x \iff x^2+3x-10=0 \iff x=2,\ x=-5$

La raíz $x=-5$ es una raíz extraña ya que $\log(-5)$ no tiene sentido; la única solución es $x=2$.

4. $\mathbf{\log x^2 = \log(10-3x)} \iff x^2 = 10-3x \iff x^2+3x-10=0 \iff x=2,\ x=-5$

En este ejemplo los dos valores tienen sentido.
Observa que $2 \log x = \log x^2$ es cierto si $x>0$, no lo es en caso de que x sea negativo, ya que $\log x$ no tiene sentido.

2. SISTEMAS DE ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Los sistemas de ecuaciones logarítmicas están formados por un conjunto de ecuaciones, alguna de las cuales es logarítmica.

En la resolución de los sistemas logarítmicos se utilizan los métodos de igualación, sustitución y reducción ya conocidos.

Recuerda una vez más que en **log x**, el número **x** debe ser positivo (**x**>0). Si haces transformaciones debes comprobar al final si existen o no raíces extrañas.

Razona los pasos dados en los siguientes sistemas:

1. $$\begin{cases} \log x+\log y=5 \\ \log x-\log y=1 \end{cases}$$

Utiliza el método de reducción. Sumando y restando las ecuaciones, resulta:

$$\begin{cases} 2\log x=6 \\ 2\log y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x=3 \\ \log y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1000 \\ y=100 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \log x+3\log y=5 \\ \log\left(\dfrac{x}{y}\right)=1 \end{cases}$$

La segunda ecuación se transforma en una diferencia de logaritmos. Observa que x e y deben ser positivos:

$$\begin{cases} \log x+3\log y=5 \\ \log x-\ \ \log y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log x+3\log y=5 \\ 4\log y=4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log x=2 \\ \log y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=100 \\ y=10 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} x-y=21 \\ \log x+\log y=2 \end{cases}$$

Vamos a pasar la segunda ecuación a la forma algebraica:

$$\begin{cases} x-y=21 \\ \log x+\log y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=21 \\ \log xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=21+y \\ xy=100 \end{cases}$$

Sustituye ahora x en la segunda ecuación.

$$(21+y)y=100 \Leftrightarrow y^2+21y-100=0 \Leftrightarrow y=4,\ y=-25$$

La segunda solución es una raíz extraña. Para $y=4$ se tiene que $x=25$.

UNAS ECUACIONES ESPECIALES

El cálculo del valor de x en estas ecuaciones debe hacerse por intervalos de aproximación (= encajados). Utiliza para ello la calculadora. Te hemos puesto algunos resultados. Atrévete con los restantes.

$x^x=1$	$x=1$
$x^x=2$	$x=1,55961...$
$x^x=3$	$x=1,82545$
$x^x=4$	$x=2$
$x^x=5$	$x=2,1...$
$x^x=6$	$x=2,$
$x^x=7$	$x=2,$
$x^x=8$	$x=2,$
$x^x=9$	$x=3$

RECUERDA

1	$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2	$a^x : a^y = a^{x-y}$
3	$(a^x)^y = a^{xy}$
4	$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$
5	$a^x : b^x = (a : b)^x$

3. ECUACIONES EXPONENCIALES CON UNA INCÓGNITA

Las ecuaciones exponenciales son aquellas en las que la incógnita se encuentra en el exponente.

Son ecuaciones exponenciales:

$$2^x=8,\ 9^x-2\cdot 3^{x+2}+81=0$$

En la resolución de estas ecuaciones se aplican las reglas de las potencias y la relación

$$\boxed{a^m=a^n \Leftrightarrow m=n}$$

Dos potencias iguales que tienen la misma base, tienen también iguales sus exponentes, y recíprocamente.

Esta **unicidad** de las potencias de la misma base permite pasar una ecuación a la **forma algebraica.**

Algunas ecuaciones exponenciales son difíciles de resolver al no poder expresar fácilmente un número como potencia de otro. Esta situación se resuelve utilizando logaritmos. Por ejemplo, la ecuación exponencial

$$2^x=127$$

se resuelve tomando logaritmos decimales (el ideal sería logaritmos en base 2, ¿por qué?) en los dos miembros de la ecuación; luego se despeja la incógnita fácilmente:

$$x \log 2=\log 127 \text{ de donde } x=\frac{\log 127}{\log 2}$$

Sigue los pasos en la resolución de las siguientes ecuaciones:

1. $\mathbf{2^{x+1}=8} \Leftrightarrow 2^{x+1}=2^3 \Leftrightarrow x+1=3 \Leftrightarrow x=2$

2. $\mathbf{4^{x+1}=8} \Leftrightarrow (2^2)^{x+1}=8 \Leftrightarrow 2^{2x+2}=2^3 \Leftrightarrow 2x+2=3 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

3. $\mathbf{2^{x+3}+4^{x+1}-320=0} \Leftrightarrow 2^3\cdot 2^x+(2^2)^{x+1}-320=0$

$$\Leftrightarrow 8\cdot 2^x+2^{2x+2}-320=0$$

$$\Leftrightarrow 8\cdot 2^x+4\cdot(2^x)^2-80=0$$

$$\Leftrightarrow (2^x)^2+2\cdot(2^x)-80=0$$

$$\Leftrightarrow y^2+2y-80=0$$

Hemos llegado así a una ecuación de segundo grado cuya incógnita es $y=2^x$. Resolviendo esta ecuación resulta:

$$y=2^x=8, \quad y=2^x=-10$$

— La ecuación $2^x = 8$ tiene por solución $x = 3$.

— La ecuación $2^x = -10$ no tiene solución, ya que 2^x es siempre positivo.

4. SISTEMAS DE ECUACIONES EXPONENCIALES

Los sistemas de ecuaciones exponenciales están formados por un conjunto de ecuaciones, alguna de las cuales es exponencial.

En la resolución de los sistemas de ecuaciones exponenciales se utilizan los métodos de **igualación, sustitución** y **reducción** ya conocidos.

Recuerda una vez más que a^x es siempre positivo. Si haces transformaciones debes comprobar al final si existen o no raíces extrañas.

En la resolución de estos sistemas pueden sustituirse las potencias

$$2^x,\ 3^x,\ 5^x,\ 6^x \ldots$$

por las letras u, v, w... para facilitar los cálculos.

Recordando tres relaciones de las potencias de la misma base (se utilizan en los dos sentidos) con unos ejemplos:

1. $2^{x+1}=2\cdot 2^x,\ 2^{x+2}=4\cdot 2^x$ (producto de potencias).
2. $5^{x-1}=\dfrac{5^x}{5},\ 5^{x-2}=\dfrac{5^x}{25}$ (cociente de potencias).
3. $(2^x)^2=2^{2x},\ 4^x=(2^2)^x=2^{2x}$ (potencia de potencia).

Razona los pasos dados en la resolución de los sistemas:

1. $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{2^x+5^y=9} \\ \mathbf{2^{x+2}-5^{y+1}=-9} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2^x+5^y=9 \\ 4\cdot 2^x-5\cdot 5^y=-9 \end{array}\right.$

Llamando $u=2^x$ y $v=5^y$, se obtiene el sistema:

$$\left\{\begin{array}{r} u+v=9 \\ 4u-5v=-9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 5u+5v=45 \\ 4u-5v=-9 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u+v=9 \\ 9u=36 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} v=5 \\ u=4 \end{array}\right.$$

Luego, $u=2^x=4 \Leftrightarrow x=2$

$v=5^y=5 \Leftrightarrow y=1$

2. $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{3\cdot 5^x+2\cdot 6^{y+1} = 807} \\ \mathbf{15\cdot 5^{x-1}-6^y = 339} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3\cdot 5^x+12\cdot 6^y = 807 \\ 3\cdot 5^x-6^y = 339 \end{array}\right.$

Llamando $u=5^x$ y $v=6^y$, se obtiene el sistema

$$\left\{\begin{array}{r} 3u+12v = 807 \\ 3u-v = 339 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 13v = 468 \\ 3u-v = 339 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} v = 36 \\ u = 125 \end{array}\right.$$

Luego, $u = 5^x = 125 \Leftrightarrow x=3$

$v = 6^y = 36 \Leftrightarrow y=2$

REPRODUCCIÓN DEL CONEJO

En el país del canguro, Australia, sucedió la más increíble aventura de los conejos. Corría el año 1859 cuando un terrateniente europeo, llevado de su afición a la caza, decidió importar unas parejas de conejos e introducirlas en las extensísimas praderas que ni siquiera los más grandes rebaños de ovejas eran capaces de esquilmar. ¿Qué pensaría este caballero al saber que una década más tarde la población de conejos se calculaba en 700 millones de ejemplares?

El crecimiento de los conejos fue estudiado por primera vez por **Leonardo de Pisa** (1202) interpretando este fenómeno por la siguiente sucesión:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55...

La expresión del término general viene dada aproximadamente por

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\Phi n \ (\Phi = 1{,}618\ldots)$$

donde Φ es el número áureo. Leonardo suponía que una pareja de conejos puede reproducirse al cabo de dos o tres meses. Con este dato se puede calcular aproximadamente el tiempo para alcanzar la población un cierto número de individuos. Despeja n tomando logaritmos.

5. APLICACIONES A LAS PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

Al estudiar las progresiones geométricas quedaron dos cuestiones sin resolver: calcular el número de términos, n, cuando aparece como exponente en las fórmulas.

RECUERDA

a_1 : primer término
a_n : último término
r : razón
n : número de términos

Recuerda:

1. El término general de una progresión geométrica es

$$\boxed{a_n = a_1\, r^{n-1}} \qquad [1]$$

2. **El producto de los términos n** de una progresión geométrica es

$$\boxed{P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}} \qquad [2]$$

Si quieres calcular el número de términos de una progresión geométrica, tanto en la fórmula [1] como en la [2], debes despejar **n**; para ello tienes que utilizar logaritmos. Tomando logaritmos en los dos miembros de ecuación resulta:

1. $\log a_n = \log a_1 + (n-1) \log r$,

de donde

$$n = \frac{\log a_n - \log a_1}{\log r} + 1$$

2. $\log P_n = \frac{n}{2} (\log a_1 + \log a_n)$,

de donde

$$n = \frac{2 \log P_n}{\log a_1 + \log a_n}$$

Un consejo: No es necesario aprender estas fórmulas de memoria; en cada caso concreto, despeja la incógnita tomando logaritmos decimales en los dos miembros de la ecuación.

En la progresión geométrica 4, 8, 16, ..., 131 072, ¿cuál es el número de términos? Utilizando la ecuación [1] se tiene:

$$131\,072 = 4 \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow 32\,768 = 2^{n-1}$$

Tomando logaritmos (utiliza calculadora) se tiene:

$$\log 32\,768 = (n-1) \log 2 \Leftrightarrow n = \frac{\log 32\,768}{\log 2} + 1 = 16$$

UN PROBLEMA

Todo el mundo que va a Rusia trae como obligado recuerdo una de esas muñecas que en su interior contiene otra de igual forma, aunque no de igual tamaño, claro está; y así sucesivamente. El volumen de cada muñeca es $\frac{2}{3}$ del de aquella que la contiene inmediatamente. La cantidad de madera de la muñeca exterior es de 360 cm^3. ¿Cuántas muñecas hay si la más pequeña tiene 31,6 cm^3?

Utiliza los recursos de esta pregunta para resolverlo.

6. APLICACIONES A LA MATEMÁTICA FINANCIERA

En las ecuaciones del interés compuesto y anualidades aparece el tiempo como exponente. Las ecuaciones son:

Interés compuesto:	$F = C(1+i)^t$
Anualidades de capitalización	$F = \dfrac{C(1+i)\ [(1+i)^t - 1]}{i}$
Anualidades de amortización	$C = \dfrac{Di(1+i)^t}{(1+i)^t - 1}$

Si tienes que despejar **t** se toman logaritmos de estas fórmulas. Lo haremos para las tres fórmulas como un ejercicio útil que debes dominar. No es necesario que sepas de memoria el resultado.

1. **Interés compuesto.**

Toma logaritmos decimales en los dos miembros. Se tiene:

$$\log F = \log C + t \log(1+i)$$

de donde:

$$t = \frac{\log F - \log C}{\log(1+i)}$$

2. **Anualidades de capitalización.**

Despeja primero $(1+i)^t$:

$$\frac{Fi}{C(1+i)} + 1 = (1+i)^t$$

Toma logaritmos decimales en los dos miembros. Se tiene:

$$\log(Fi/C(1+i) + 1) = t \log(1+i)$$

de donde

$$t = \frac{\log (Fi/C(1+i) + 1)}{\log(1+i)}$$

3. **Anualidades de amortización.**

Despeja primero $(1+i)^t$:

$$C(1+i)^t - C = Di(1+i)^t \iff (C - Di)(1+i)^t = C$$

Toma logaritmos decimales en los dos miembros. Se tiene:

$$\log(C - Di) + t \log(1+i) = \log C$$

de donde:

$$t = \frac{\log C - \log(C - Di)}{\log(1+i)}$$

RECUERDA

C : capital inicial
F : capital final
D : deuda
i : tanto por 1, 12 % = 0,12 por 1.
t : tiempo

UN PROBLEMA DE INTERÉS

Muchas veces interesa conocer cuánto tiempo tiene que estar colocado el dinero en el banco para que se duplique el capital.

Es evidente que depende del tanto por ciento. ¿Podrías comprobar que la duplicación del dinero no depende del capital inicial?

Este mismo problema es válido cuando se trata de poblaciones, o incluso del crecimiento de un bosque.

En la siguiente tabla se indican los tiempos en años.

Compruébalo con la calculadora.

$1+i \longrightarrow \boxed{y^x} \longrightarrow t=2$?

Tanto	1+i	t años
1 %	1,01	70
2 %	1,02	36
3 %	1,03	24
4 %	1,04	18
5 %	1,05	15
6 %	1,06	12
7 %	1,07	10
8 %	1,08	9
9 %	1,09	8
10 %	1,10	7

1 **El crecimiento de un bosque viene dado por la fórmula**

$$F = A(1+i)^t$$

donde F es la madera que habrá dentro de t años, A la madera actual, e i la tasa de crecimiento anual. Si esta tasa se mantiene, calcula el tiempo que tardará en duplicarse la madera del bosque. Aplicación: $i = 0{,}02$.

Si se duplica la madera $F = 2A$, luego:

$$2A = A(1+i)^t \Leftrightarrow 2 = (1+i)^t$$

Tomando logaritmos decimales en la última ecuación, resulta

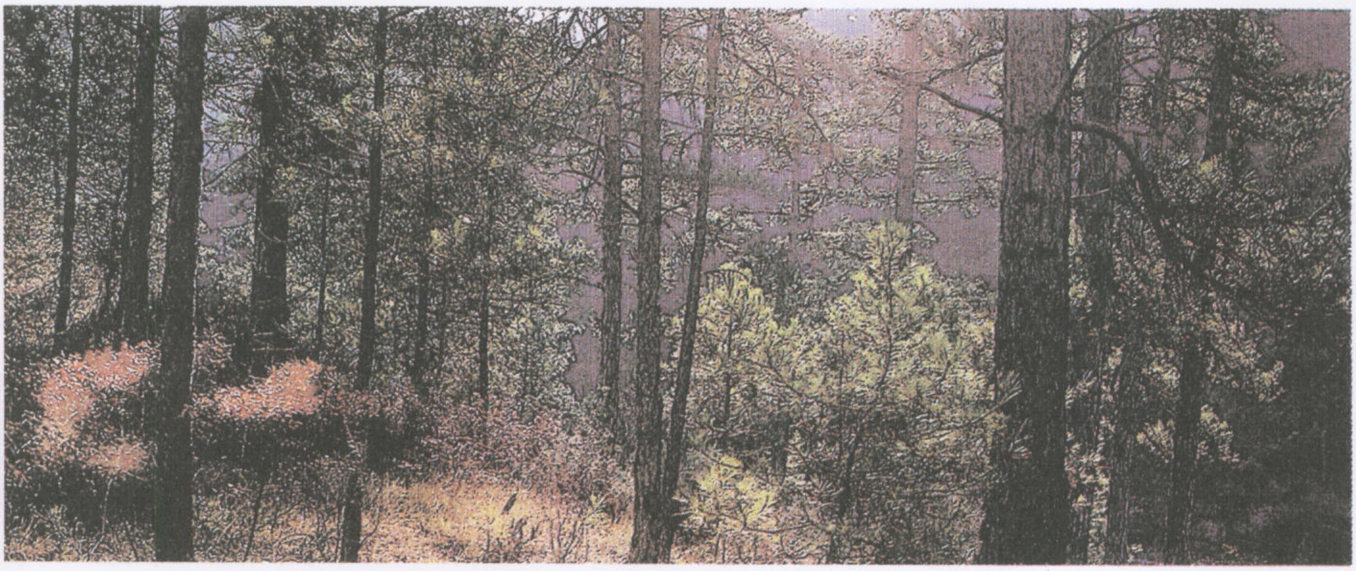
$$\log 2 = t \log (1+i)$$

de donde,

$$t = \frac{\log 2}{\log (1+i)}$$

Si $i = 0{,}02$ se tiene que

$$t = \frac{\log 2}{\log 1{,}02} = 35 \text{ años}$$



2 **Se coloca un capital C a un interés compuesto del 12 %. Calcula el tiempo que tardará en duplicarse.**

El capital final a interés compuesto viene dado por la fórmula

$$F = C(1+i)^t$$

Si se duplica el capital $F = 2C$, luego

$$2C = C(1+i)^t \Leftrightarrow 2 = (1+i)^t$$

Tomando logaritmos decimales en la última ecuación, resulta

$$\log 2 = t \log (1+i)$$

de donde,

$$t = \frac{\log 2}{\log (1+i)}$$

Si $i = 0{,}12$ se tiene que

$$t = \frac{\log 2}{\log 1{,}12} \approx 6{,}12 \text{ años} \approx 6 \text{ años } 44 \text{ días}$$

ACTIVIDADES

Ejercicios para repasar

1 ¿Verdadero o falso? ¿Por qué?

1. $\log[(-2)(-5)] = \log(-2) + \log(-5)$
2. $\log[(-2)(-5)] = \log 2 + \log 5$
3. $\log[(-2):(-5)] = \log(-2) - \log(-5)$
4. $\log[(-2):(-5)] = \log 2 - \log 5$

2 ¿Verdadero o falso? ¿Por qué?

1. $\log 2^2 = 2 \log 2$
2. $\log(-2)^2 = 2 \log(-2)$
3. $\log(-2)^2 = 2 \log 2$
4. $\log x^2 = 2 \log x$

3 ¿Verdadero o falso? ¿Por qué?

1. $\log \sqrt{2} = \left(\frac{1}{2}\right) \log 2$
2. $\log \sqrt{(-2)} = \left(\frac{1}{2}\right) \log(-2)$
3. $\log \sqrt[3]{-27} = \left(\frac{1}{3}\right) \log 3$
4. $\log x^3 = 3 \log x$

4 Expresa las siguientes igualdades algebraicamente:

1. $\log x + \log y = 1$
2. $\log x - \log y = 1$
3. $3 \log x + 2 \log y = 2$
4. $3 \log x - 1 = \log y$

5 Expresa en forma logarítmica las siguientes relaciones:

1. $xy = 100$
2. $x^2y^3 = 1\,000$
3. $\frac{x^2}{y^3} = 10^6$
4. $7x^n = 100$

Ejercicios para entrenarse

6 Resuelve las siguientes ecuaciones descomponiendo el segundo miembro en factores:

1. $2^x = 8$
2. $2^x = 64$
3. $2^{x+1} = 256$
4. $2^x = 1\,024$

7 Resuelve las siguientes ecuaciones descomponiendo el segundo miembro en factores:

1. $3^x = 27$
2. $3^x = 81$
3. $3^{x+1} = 729$
4. $3^x = 6\,561$

8 Resuelve las siguientes ecuaciones descomponiendo el segundo miembro en factores:

1. $5^x = 125$
2. $5^x = 15\,625$
3. $5^{x+1} = 625$
4. $5^x = 390\,625$

9 Resuelve las siguientes ecuaciones utilizando logaritmos (emplea para ello la calculadora) y compara los resultados con los obtenidos en el ejercicio anterior:

1. $5^x = 125$
2. $5^x = 15\,625$
3. $5^{x+1} = 625$
4. $5^x = 390\,625$

10 Resuelve las siguientes ecuaciones utilizando logaritmos (emplea para ello la calculadora):

1. $5^x = 10$
2. $2^x = 25$
3. $3^{x+1} = 80$
4. $7^x = 39$

11 Resuelve las siguientes ecuaciones utilizando el camino más conveniente:

1. $2 \cdot 5^x = 250$
2. $3 \cdot 2^x = 24$
3. $3 \cdot 5^x = 75$
4. $7 \cdot 2^x = 224$

A

12 Resuelve las siguientes ecuaciones descomponiendo en factores el primer miembro:

1. $2^{x+1} = 16$
2. $2^{x-1} = 64$
3. $2^{x+2} = 256$
4. $2^{x-2} = 1\,024$

13 Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $\log x = 1$
2. $\log x = 3$
3. $\log x = -1$
4. $\log x = -3$

14 Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $\log_2 x = 1$
2. $\log_2 x = 3$
3. $\log_2 x = -1$
4. $\log_2 x = -3$

15 Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $\log_x 125 = 3$
2. $\log_x \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$
3. $\log_x 9 = 2$
4. $\log_x 0{,}001 = 3$

16 Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $3 \log x = 3$
2. $2 \log x = 10$
3. $3 \log x = -3$
4. $2 \log x = -10$

17 Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $\log x + \log 50 = \log 1000$
2. $\log x = 1 + \log(22 - x)$
3. $2 \log x - \log(x - 16) = 2$
4. $\log x^3 = \log 6 + 2 \log x$

18 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

1. $\begin{cases} x + y = 70 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + y = 22 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x - y = 15 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} x - y = 8 \\ \log_2 x + \log_2 y = 7 \end{cases}$

19 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

1. $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2 \log x - 3 \log y = 7 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ 2 \log x - 2 \log y = -1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} \log x + 3 \log y = 5 \\ \log x - \log y = 3 \end{cases}$

20 Resuelve los siguientes sistemas por el método más adecuado:

1. $\begin{cases} \log x + 3 \log y = 5 \\ \log \left(\frac{x}{y}\right) = 3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2 \log x + \log y = 5 \\ \log xy = 4 \end{cases}$

21 Resuelve las siguientes ecuaciones:

1. $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$
2. $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 117$
3. $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 480$
4. $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + 2^{x-4} = 960$

22 Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales reduciéndolas a ecuaciones de segundo grado:

1. $3^{2x+2} - 28 \cdot 3^x + 3 = 0$
2. $9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 81 = 0$
3. $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$
4. $7^{2x+3} - 8 \cdot 7^{x+1} + 1 = 0$

23 Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales reduciéndolas a ecuaciones de segundo grado:

1. $5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125 = 0$
2. $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$
3. $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$
4. $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$

Problemas para resolver

24 Encuentra la base del sistema de logaritmos en la que el logaritmo de 100 excede al logaritmo de 25 en 2 unidades.

25 Se sabe que la suma de dos números es 70 y que la suma de los logaritmos decimales de los mismos es 3. Halla dichos números.

26 Halla en cuantos años se duplicará el número de habitantes de una población que experimenta un crecimiento anual del 4 %?

27 ¿A qué interés compuesto anual hay que colocar un capital para que en 6 años produzca un beneficio del 50 %?

28 Dos capitales, uno doble de otro, se colocan a interés compuesto del 6 % y 10 %, respectivamente. ¿Al cabo de cuántos años los finales serán iguales?

29 ¿Durante cuánto tiempo habrá de estar colocando anualidades de 20 000 pesetas al 5 % para formar un capital de 453 600?

30 Una pareja de novios decide abrir una cuenta-vivienda por la que el banco paga el 10 %. Esta pareja puede ahorrar al año 300 000. ¿Cuánto tiempo tienen que esperar para comprar un piso cuyo coste será de 10 millones de pesetas?

Cuestiones para aclararse

31 Razona con ejemplos la veracidad o no de las siguientes proposiciones:

1. De $x^2 = y^2$ se sigue que $x = y$.
2. De $x^3 = y^3$ se sigue que $x = y$.
3. De $3^x = 3^y$ se sigue que $x = y$.
4. De $\log x = \log y$ se sigue que $x = y$.

32 Razona con ejemplos la veracidad o no de las siguientes proposiciones:

1. De $x^2 = y^2$ se sigue que $|x| = |y|$
2. De $x^3 = y^3$ se sigue que $|x| = |y|$

33 Razona con ejemplos la veracidad o no de las siguientes proposiciones:

1. De $\log x^3 = \log y^3$ se sigue que $x = y$.
2. De $2 \log x = \log y^2$ se sigue que $x = y$.
3. De $\log x^2 = \log y^2$ se sigue que $x = y$.

34 Razona con ejemplos la veracidad o no de las siguientes proposiciones:

1. De $3^x = e^y$ se sigue que $x = y$.
2. De $3^{-x} = 3^{-y}$ se sigue que $x = y$.

Actividades para profundizar

35 Resuelve los sistemas siguientes:

1. $$\begin{cases} \log(x+y) + \log(x-y) = \log 33 \\ e^x \cdot e^y = e^{11} \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x^2 - y^2 = 10\,000 \\ (x-y)^{\log(x+y)} = 1\,000 \end{cases}$$

36 Demostrar que $\log(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \log(x - \sqrt{x^2 - 1}) = 0$, para todo valor de $x \geqslant 0$.

37 Despeja y en la igualdad $\log x + \log y = \log(x+y)$.